



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Questão 3:

(1) Há mais de uma versão do Teorema Central do Limite. Enunciei a versão em que temos uma amostra aleatória X e uma amostra $(X_1, \dots, X_n)$ tal que as X_i 's são independentes e identicamente distribuídas, com $0 < \text{Var}(X_i) < \infty$. Nessas condições, o teorema diz: se X possui média μ e variância σ^2 , então a variável aleatória

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Z \sim N(0, 1), \text{ isto é, converge em distribuição para uma distribuição normal com média } 0 \text{ e variância } 1.$$

(2)

Dem.: Note que $E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right]}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$

~~então~~ e $\text{Var}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2} \cdot \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$

Então

$$E[Z_n] = \frac{\mu - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = 0 \text{ e } \text{Var}[Z_n] = \frac{\sigma^2/n}{\sigma^2/n} = 1$$

Então Z_n distribui com média 0 e variância 1.

Agora chame $Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$. Assim $Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sigma \sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sqrt{n}}$

Recorde que a função característica de uma variável aleatória X é:

$$\varphi_X(t) = E[e^{itx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx \text{ e a função geratriz dos momentos é}$$

$$\varphi_X(-it) = E[e^{xt}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f_X(x) dx =: M_X(t). \text{ Note que } M_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Derivando em t e calculando em $t=0$, temos $\left. \frac{\partial M(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x e^{xt} f_X(x) dx \right]_{t=0}$
 $= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = E[X]$. Derivando n vezes teríamos $E[X^n]$.

Assim, a função característica nos permite obter a função geratriz de momentos que, por sua vez, fornece a descrição da distribuição.

Como X_i 's são variáveis independentes, por Fubini, temos que

$$\varphi_{a_1 X_1 + \dots + a_n X_n}(t) = \varphi_{X_1}(a_1 t) \dots \varphi_{X_n}(a_n t). \text{ Como } Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sqrt{n}}, \text{ temos}$$

$$\varphi_{Z_n}(t) = \varphi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \dots \varphi_{Y_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right)^n, \text{ pois } Y_i \sim N(0,1) \text{ i.i.d, ou seja, o índice } i \text{ não importa aqui.}$$

$$\varphi_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it y / \sqrt{n}} f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) dy + \frac{it}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy - \frac{t^2}{2n} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y) dy + o(t^2)$$

usando expansão de Taylor $e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) dy + \frac{it}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy - \frac{t^2}{2n} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y) dy + o(t^2)$$

$$\text{Então } \varphi_{Z_n}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-t^2/2}, \text{ usando } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x$$

Resta mostrar que a função característica de uma normal também é $e^{-t^2/2}$.

Isso segue do fato de função densidade de probabilidade de uma normal padrão Z ser $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \text{ Logo, } \varphi_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} e^{-z^2/2} dz =$$

$$\text{multiplicando por } e^{-t^2/2} \cdot e^{t^2/2} = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z-it)^2/2} dz = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty-it}^{+\infty-it} e^{-s^2/2} ds = e^{-t^2/2}$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A – IM
EDITAL 54/2024

onde usamos que a última integral é $\sqrt{2\pi}$, pois essa é uma famosa integral complexa que adota o integral de Gauss.
Com isso obtemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi_2(t)$, como queríamos #

(3)



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Questão 1:

(1) Seja V espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $T: V \rightarrow V$ operador linear associado a matriz real A $n \times n$. Seja $p_A(t) = \det(tI - A)$ o polinômio característico de A e $m_A(t)$ o polinômio minimal. Se $p_A(t) = (x - \lambda_1)^{s_1} \dots (x - \lambda_n)^{s_n}$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são autovalores de autovetores $v_1, \dots, v_n$, onde $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ é base de V . Suponha $m_A(t) = (x - \lambda_1)^{s_1} \dots (x - \lambda_n)^{s_n}$. Então a forma canônica de Jordan de A é $J = \begin{bmatrix} J_{p_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{p_n}(\lambda_n) \end{bmatrix}$ formada por blocos de Jordan $J_{p_i}(\lambda_i)$ na diagonal principal e zeros nas demais entradas, onde $J_{p_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$ é matriz $p_i \times p_i$, $\forall i = 1, \dots, n$ de forma que $p_i \leq s_i$ e a soma da ordem do bloco de Jordan associado a λ_i não pode ultrapassar s_i .

Mas usualmente o que fazemos é estender $\mathbb{R}$ para um corpo algebricamente fechado, mais precisamente $\mathbb{C}$. Nesta forma o Teorema da Forma Canônica de Jordan diz: Seja $T: V \rightarrow V$ operador linear de espaço vetorial V sobre $\mathbb{C}$. Então existe uma base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V tais que $T(v_i) = \lambda_i v_i$, $\forall i = 1, \dots, n$. Na qual a forma canônica de Jordan é

$$J = [T]_B = \begin{bmatrix} J_{p_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{p_n}(\lambda_n) \end{bmatrix} \text{ com } J_{p_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

e J é única a menos de permutação.

Assim, para qualquer matriz A complexa e J sua forma de Jordan, existe matriz P tal que $A = PJP^{-1}$.

Obs.: a passagem para $\mathbb{C}$ não faz perder a unicidade (a menos de permutação) pois a similaridade é preservada.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

(2) Temos que o polinômio característico é $p_A(t) = t^5 + 2ta^2 + a^2t$
 $\Rightarrow p_A(t) = t(t^4 + 2t^2a + a^2) = t(y^2 + 2ya + a^2)$

$\downarrow$
 $t^2 = y$
Então $p_A(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $y^2 + 2ya + a^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a^2}}{2} = -a$

Então $p_A(t) = t(t - ai)^2(t + ai)^2 \Rightarrow t^2 = -a \Rightarrow t = \pm ai$

Se $m_A(t) = t(t - ai)^2(t + ai)^2$ ou $m_A(t) = (t - ai)^2(t + ai)^2$, então

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ai & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ai & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -ai & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -ai \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 0 & ai & 1 & & \\ & 0 & ai & & \\ & & & -ai & 0 \\ & & & 0 & -ai \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 0 & ai & 0 & & \\ & 0 & ai & & \\ & & & -ai & 0 \\ & & & 0 & -ai \end{bmatrix}$$

$$\text{ou } \begin{bmatrix} 0 & ai & 0 & & \\ & 0 & ai & & \\ & & & -ai & 1 \\ & & & 0 & -ai \end{bmatrix}$$

Se $m_A(t) = t(t - ai)^2(t + ai)$, então $J = \begin{bmatrix} 0 & ai & 1 & & \\ & 0 & ai & & \\ & & & -ai & 0 \\ & & & 0 & -ai \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 0 & ai & a & & \\ & 0 & ai & & \\ & & & -ai & 0 \\ & & & 0 & -ai \end{bmatrix}$

Se $m_A(t) = t(t - ai)(t + ai)^2$, então

$$J = \begin{bmatrix} 0 & ai & 0 & & \\ & 0 & ai & & \\ & & & -ai & 1 \\ & & & 0 & -ai \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 0 & ai & 0 & & \\ & 0 & ai & & \\ & & & -ai & 0 \\ & & & 0 & -ai \end{bmatrix}$$

Se $m_A(t) = t(t - ai)(t + ai)$, então $J = \begin{bmatrix} 0 & ai & 0 & & \\ & 0 & ai & & \\ & & & -ai & 0 \\ & & & 0 & -ai \end{bmatrix}$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

(3) Duas matrizes são similares se possuem mesma forma canônica de Jordan (a menos de permutação).

Para B perquirir inversa não nula, temos $\det m_B(t) \neq 0$

Por Cayley-Hamilton, $P_B(t) = 0$. Então $(B - Id)^n = 0$

Se $n=1$, teremos $B - Id = 0$. Logo, $B = Id = B^{-1} \Rightarrow B$ e B^{-1} similares

~~Suponha por ∞ indução que vale para n qualquer.~~



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Questão 2:

(1) Teorema de Stokes para o rotacional: Seja S superfície orientada, suave por partes e com região delimitada por uma curva Γ , simples, fechada, suave por partes e com orientação positiva. Seja $F = (P, Q, R)$ um campo vetorial cujas componentes possuem derivadas parciais contínuas em um aberto de $\mathbb{R}^3$ que contém S . Então:

$$\int_{\Gamma} F \, dr = \iint_S \text{rot}(F) \cdot dS, \text{ onde } r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \text{ descreve } S; \Gamma = \partial S$$

(2) Sejam $F = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$, onde $u = u(x, y, z)$

Pelo Teorema de Stokes,

$$\iint_{\partial R} \nabla u \cdot d\mathbf{n} = \iiint_R \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right), \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) dx dy dz$$